

Ogólna teoria miary
Lista 2

Definicja. Algebrą podzbiorów X nazywamy pierścień podzbiorów X do którego należy zbiór X .

Zad 1. Udowodnić, że rodzina S podzbiorów X jest algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy $\emptyset \in S$, spełniony jest warunek (Przekrój) oraz warunek

$$\text{(Dopełnienie)} \quad \forall_{A \in S} \quad A' \in S,$$

gdzie $A' = X \setminus A$ jest dopełnieniem zbioru A .

Definicja. Rodzinę S podzbiorów X spełniającą warunek (Różnica) oraz warunek

$$\text{(\sigma-Suma)} \quad \forall_{\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$$

nazywamy σ -pierścieniem podzbiorów X . Jeśli dodatkowo $X \in S$, to S nazywamy σ -algebrą podzbiorów X .

Zad 2. Wykazać, że każdy σ -pierścień spełnia warunek

$$\text{(\sigma-Przekrój)} \quad \forall_{\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in S.$$

Zad 3. Czy w definicji σ -pierścienia można zastąpić warunek (σ -Suma) warunkiem (σ -Przekrój)? Jak odpowiedź brzmiałaby dla σ -algebry?

Zad 4. Jaką strukturę: półpierścień, pierścień, algebrę, σ -pierścień, σ -algebrę tworzą następujące rodziny podzbiorów zbioru X ($|A|$ oznacza tu moc zbioru A):

- a) $S = \{A \subset X : |A| \leq 1\}$,
- b) $S = \{A \subset X : |A| < \aleph_0\}$,
- c) $S = \{A \subset X : |A| < \aleph_0 \text{ lub } |A'| < \aleph_0\}$,
- d) $S = \{A \subset X : |A| \leq \aleph_0\}$,
- e) $S = \{A \subset X : |A| \leq \aleph_0 \text{ lub } |A'| \leq \aleph_0\}$,

Zad 5. Czy rodzina

$$S = \{A \subset \mathbb{R}^2 : (x, y) \in A \rightarrow (-x, -y) \in A\}$$

stanowi σ -algebrę podzbiorów płaszczyzny \mathbb{R}^2 ?

Zad 6. Wykazać, że przecięcie dowolnej rodziny σ -algebr (σ -pierścieni, algebr, pierścieni) jest σ -algebrą (σ -pierścieniem, algebrą, pierścieniem).

Zad 7. Pokazać, że przecięcie dwu półpierścieni nie musi być półpierścieniem.

Zad 8. Wyznaczyć σ -algebrę generowaną przez jeden właściwy podzbiór X .

Zad 9. Wyznaczyć σ -algebrę generowaną przez dwa właściwe podzbiory X .

Zad 10. Obliczyć maksymalną ilość elementów σ -algebry generowanej przez n podzbiorów zbioru X .